10-й класс

1. Можно ли найти натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_{2012}$, среди которых нет двух одинаковых, так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_{2012}}=1?$$

2. Докажите, что если в остроугольном треугольнике все его высоты делятся точкой их пересечения в одном и том же отношении (считая, как обычно, от вершин треугольника), то треугольник равносторонний.

3. Положительные числа a, b и $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ рациональны. Доказать, что числа $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[3]{b}$ также рациональны.

4. Существуют ли такие натуральные числа m и n, что

$$\frac{m}{n}+\frac{n+1}{m}=4?$$

5. 2013 цифр выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 2013-значное число (в широком смысле — несколько первых цифр могут быть и нулями) делится на 27. Доказать, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

6. В $3n$ клетках таблицы $2n \times 2n$ расставлены нули, а в остальных — единицы. Докажите, что все нули можно удалить, вычеркнув n строк и n столбцов.